Chap 6

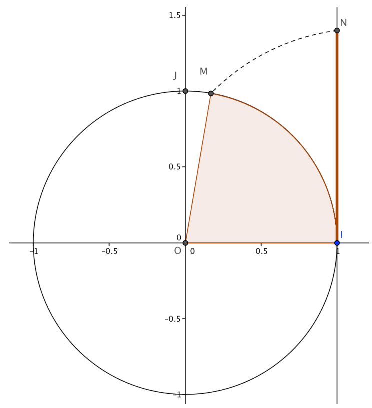
TRIGONOMETRIE

I Le cercle trigonométrique

a) Enroulement de la droite des réels

Définition : Le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O de rayon 1, orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, appelé **sens direct**.

On "enroule" la droite des réels (droite d'équation x = 1 et d'origine I) autour du cercle C
Tout point N d'abscisse x de la droite des réels vient se superposer à un point M du cercle C, et on associe ainsi à tout réel x un unique point M du cercle trigonométrique grâce à cet enroulement.
M est appelé l'image de x sur C.



Propriété : Si $\boldsymbol{y = x + k \times 2\pi}$ où $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$ $(entiers\ relatifs)$, alors x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

b) le radian

Définition : La mesure en radian d'un angle géométrique est égale à la longueur de l'arc du cercle trigonométrique qu'il intercepte.

Exemple : Un angle plat (180°) mesure exactement π radians, soit environ 3,14 rad.

Propriété : Les mesures des angles en degré et en radian sont proportionnelles.

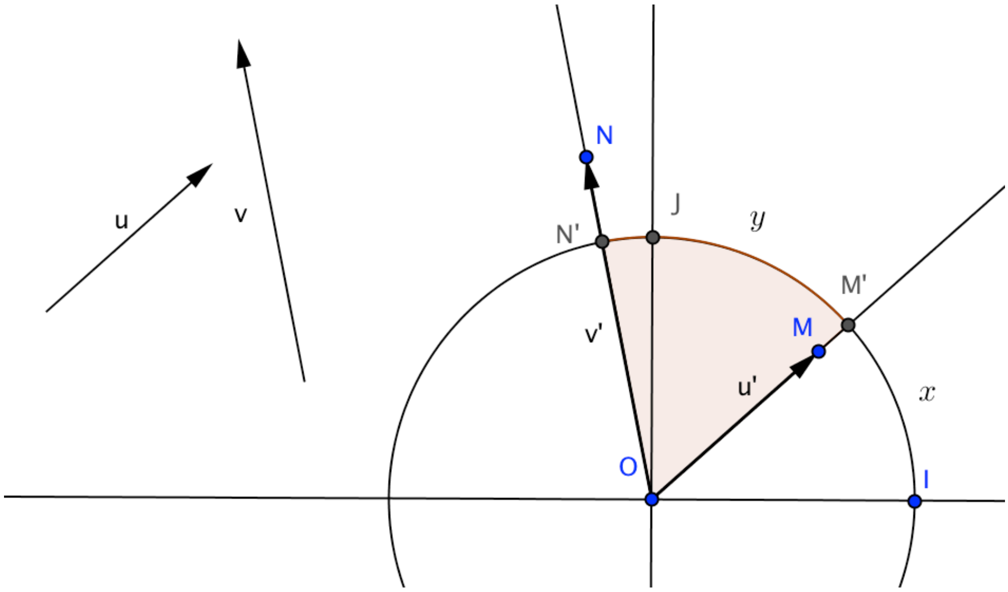
On peut donc établir le tableau suivant :

mesure en degrés	0	30	45	60	90	180
mesure en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π

II Mesures d'un angle orienté

a) Angle orienté

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On définit les points M et N tels que $\overrightarrow{OM}$et $\overrightarrow{ON}$ soient leurs représentants respectifs d'origine O. Soit M′ et N′ les points d'intersection des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique.
Soit x et y deux nombres réels qui ont pour points-images M′ et N′, alors y − x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.



Remarques :

- Les deux points M' et N' sont uniques mais il existe une infinité de nombres x et y qui ont pour image ces points donc un angle orienté a une infinité de mesures différentes. Cependant, elles sont toutes égales à un nombre entier de fois 2 π près, c'est-à-dire à un nombre k $\times 2\pi$ près (k $\in$ Z).
- Si M est le point-image du réel x, alors $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ = x.
- **On mesure positivement l'angle** en partant du 1er vecteur et en tournant dans le sens direct vers le 2ème vecteur. Et on **mesure négativement l'angle** en partant du 1er vecteur et en tournant dans le sens contraire (non direct) vers le 2ème vecteur.
- L'angle dépend uniquement de la **direction et du sens** des vecteurs $\boldsymbol{\vec{u}}$ ***et*** $\boldsymbol{\vec{v}}$, pas de leur longueur.

b) Mesure principale

Propriété : L'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ a une unique mesure α dans l'intervalle, $]-\pi\ ;\pi]$ appelée mesure principale.

Exemple Dans le repère orthonormé (O; I, J), on a l'égalité $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = \frac{\pi}{2}$.

Méthode pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté :

• soit la mesure de l'angle est dans l'intervalle $]-\pi\ ;\pi]$, c'est alors la mesure principale ;

• soit la mesure de l'angle est strictement supérieure à π. On retranche 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\pi]$;

• soit la mesure de l'angle est inférieure ou égale à - π. On ajoute 2π, plusieurs fois si nécessaire, jusqu'à obtenir une mesure dans $]-\pi\ ;\pi]$.

Exemple : $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{17\pi}{3}$. Quelle est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$?

$\frac{17\pi}{3} \notin]-\pi\ ;\pi]$ car $\frac{17\pi}{3} > \pi$ en effet $\frac{17\pi}{3} \approx 5{,}7\pi$

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{17\pi}{3} - 6\pi = \frac{17\pi}{3} - \frac{18\pi}{3} = \frac{-\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi\ ;\pi]$

La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc $-\frac{\pi}{3}$

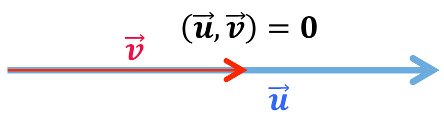
c) Angle de deux vecteurs colinéaires

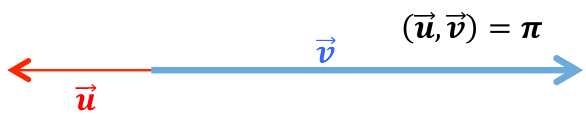
Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} = k\,\vec{v}$, *avec* $k > 0$, alors $(\vec{u},\vec{v}) = \mathbf{0}$, **angle nul**.

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire alors $\vec{u} = k\,\vec{v}$, *avec* $k < 0$, alors $(\vec{u},\vec{v}) = \pi$, **angle plat**.

Conséquences :

- $(\vec{u},\vec{u}) = 0$ *car* $\vec{u} = \mathbf{1}.\vec{u}$
- $(\vec{u},-\vec{u}) = \pi$ *car* $-\vec{u} = -\mathbf{1}.\vec{u}$





d) Relation de Chasles

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs non nuls.

La relation de Chasles pour les angles s'écrit $(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w})$

Conséquences :

- $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$
- $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$
- $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$
- $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$

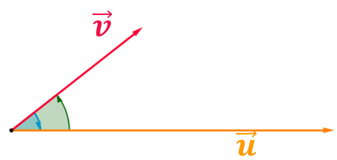
dem :

$(\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) = (\vec{u},\vec{u}) = 0$ donc $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$

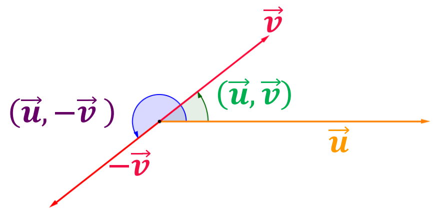
$(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$

$(-\vec{u},\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$

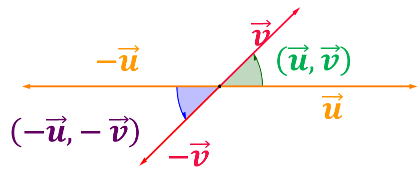
$(-\vec{u},-\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi + \pi = (\vec{u},\vec{v})$



$(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v})$



$(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$



$(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$

III Cosinus et sinus

a) Cosinus et sinus d'un réel et d'un angle orienté

Rappel : Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique Soit x un nombre réel et M le point-image de x sur le cercle trigonométrique C. Le point M a pour coordonnées (cos x ; sin x).

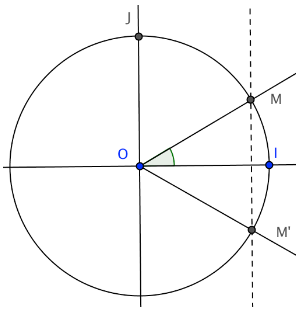
Exemple : Le nombre réel 0 a pour point-image I(1 ; 0) donc cos 0 = 1 et sin 0 = 0.

Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour point-image J(0 ; 1) donc $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Définition : Le cosinus (respectivement le sinus) d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radian.

b) Résolution d'équation trigonométrique

Résolution de l'équation cos x = cos a (a étant connu). Il existe deux points M et M', d'abscisse cos a, ces sont les points images des nombres :
$\begin{cases} \boldsymbol{a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \\ \boldsymbol{-a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$

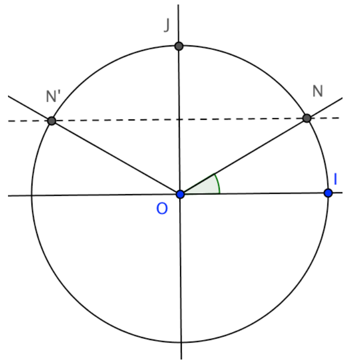


Par exemple résoudre cos x = cos $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$.

Il existe deux points d'abscisse cos $\frac{\pi}{6}$: M$(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \frac{1}{2})$ et M' $(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; -\frac{1}{2})$

donc les solutions sont : cos $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \\ \boldsymbol{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$

Résolution de l'équation sin x = sin a (a étant connu). Il existe deux points N et N', d'ordonnée sin a, ces sont les points images des nombres :
$\begin{cases} \boldsymbol{a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \\ \boldsymbol{\pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$



Par exemple résoudre sin x = sin $\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$.

Il existe deux points d'ordonnée sin $\frac{\pi}{6}$: N $(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \frac{1}{2})$ et N' $(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ ; \frac{1}{2})$

donc les solutions sont : $\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \\ \boldsymbol{\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}} \end{cases}$

c) Propriétés du cosinus et du sinus

Propriétés :
Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k :

- $(cos\ x)^2 + (sin\ x)^2 = 1$
- $-1 \leq cos\ x \leq 1$ et $-1 \leq sin\ x \leq 1$
- $\cos(x + k\times 2\pi) = \cos x$
- $sin(x + k\times 2\pi) = sin\ x$

- $\boldsymbol{cos(-x) = cos(x)}$
- $\boldsymbol{sin(-x) = -sin(x)}$
- $\boldsymbol{cos(\pi + x) = -cos(x)}$
- $\boldsymbol{sin(\pi + x) = -sin(x)}$
- $\boldsymbol{cos(\pi - x) = -cos(x)}$
- $\boldsymbol{sin(\pi - x) = sin(x)}$

- $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)}$
- $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)}$
- $\boldsymbol{cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin(x)}$
- $\boldsymbol{sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)}$